

GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

MATEMATICĂ
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

Pentru clasa a – VI – a
Ediția a doua revizuită și adăugită

EDITURA HYPERION

	Enunț.	Rez.
1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale.	5	147
1.1 Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice / nenumerice; relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi	5	147
1.2 Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	8	148
1.3 Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.	10	149
1.4 Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele	16	150
1.5 Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	21	154
1.6 Teste grilă de autoevaluare	23	156
Testul 1	23	156
Testul 2	24	156
Testul 3	25	157
Testul 4	26	157
Testul 5	27	157
Testul 6	28	158
Testul 7	29	158
2. Rapoarte. Proporții	30	159
2.1 Rapoarte; proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; procente; proporții derivate.	30	159
2.1.1 Rapoarte	30	159
2.1.2 Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție.	31	159
2.1.3 Procente; problem în care intervin procente	32	160
2.2 Șir de rapoarte egale; mărimi direct propor-		

ționale; regula de trei simplă	36	162
2.3 Șir de rapoarte egale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă	39	164
2.4 Elemente de organizarea datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextual proporționalității. Probabilități	42	166
2.5 Teste grilă de evaluare	44	166
Testul 1	44	166
Testul 2	45	166
Testul 3	46	167
Testul 4	47	167
Testul 5	48	168
Testul 6	49	168
3. Mulțimea numerelor întregi	50	169
3.1 Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi	50	169
3.2 Adunarea numerelor întregi, proprietăți	53	170
3.3 Scăderea numerelor întregi	54	170
3.4 Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	55	171
3.5 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	56	171
3.6 Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri	58	172
3.7 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	60	173
3.8 Ecuații, inecuații, problem care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor / inecuațiilor în contextual numerelor întregi	61	173
3.9 Teste grilă de evaluare	63	174
Testul 1	63	174
Testul 2	64	174
Testul 3	65	175
Testul 4	66	175
Testul 5	67	176

Testul 6	68	176
Testul 7	69	176
4. Mulțimea numerelor raționale	70	177
4.1 Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul. Compararea și ordonarea numerelor raționale	70	177
4.2 Adunarea numerelor raționale. Proprietăți. Scăderea numerelor raționale	73	177
4.3 Înmulțirea numerelor raționale. Proprietăți ...	77	178
4.4 Împărțirea numerelor raționale	79	180
4.5 Ridicarea la putere cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	81	180
4.6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	82	181
4.7 Ecuații în mulțimea numerelor raționale		
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor ...	84	182
4.8 Teste grilă de evaluare	87	184
Testul 1	87	184
Testul 2	88	185
Testul 3	89	185
Testul 4	90	186
Testul 5	91	186
Testul 6	92	187
Testul 7	93	187
5. Noțiuni geometrice fundamentale	94	188
5.1 Unghiuri opuse la vârf, congruența lor. Unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare ...	94	188
5.2 Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	97	189
5.3 Drepte paralele. Axioma dreptelor paralele. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte cu o secantă). Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice)	100	191
5.4 Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Aplicații		

practice în poligoane și corpuri geometrice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă	103	192
5.5 Cerc. Elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc, unghi la centru. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.	106	193
5.6 Teste grilă de evaluare	109	194
Testul 1	109	194
Testul 2	110	195
6. Triunghiul	111	195
6.1 Triunghiul: definiție, elemente, clasificare. Perimetrul unui triunghi. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior	111	195
6.2 Construcția triunghiurilor	115	199
6.3 Linii importante în triunghi: bisectoare, mediatoare, înălțime, mediană. Concurența lor. Cercul înscris, cercul circumscris unui triunghi. Congruența triunghiurilor oarecare. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Metoda triunghiurilor congruente	117	200
6.4 Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi sau mediatoarea unui segment	120	201
6.5 Proprietăți ale triunghiului isoscel. Proprietăți ale triunghiului echilateral	123	203
6.6 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	129	208
6.7 Teste grilă de evaluare	132	211
Testul 1	132	211
Testul 2	133	211
Testul 3	134	212
Testul 4	135	213
Testul 5	136	213
7. Teste grilă de autoevaluare finale	137	213
Testul 1	137	213
Testul 2	138	214
Testul 3	139	214
Testul 4	140	215

Testul 5	141	215
Testul 6	142	216
Testul 7	143	216
Testul 8	144	217
Testul 9	145	217
Testul 10	146	218

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
Str. Împăratul Traian, nr. 30
Craiova

1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale.

1.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice / nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime.

Relații între mulțimi.

1. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 12345 b) 13579 c) 2468 d) 4 724 911.
2. Scrieți mulțimea resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la:
a) 5 b) 9 c) 3 d) 4 e) 7.
3. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 8.
4. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mari decât 4 și mai mici sau egale cu 12.
5. Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mari decât 10 și mai mici decât 32.
6. Scrieți mulțimea numerelor naturale, nenule mai mici decât 100 și care sunt pătrate perfecte.
7. Scrieți mulțimea numerelor naturale, nenule mai mici decât 100 și care sunt multipli ai lui 12.
8. Scrieți mulțimea cifrelor pare și mulțimea cifrelor impare.
9. Se consideră mulțimea: $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$.
Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $3 \in A$ b) $5 \in A$ c) $7 \in A$ d) $9 \notin A$ e) $2 \notin A$.
10. Se consideră mulțimile: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Stabiliți care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:
a) $3 \in A$ b) $5 \in B$ c) $7 \in A$ d) $9 \notin A$ e) $8 \notin B$.
11. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\{1\} \subset \{0, 1, 2\}$ b) $\{0, 1, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 c) $\{1, 5\} \subset \{0, 1, 2, 4, 6\}$ d) $\{0, 2, 6\} \subset \{0, 4, 5, 7\}$
 e) $\emptyset \subset \{2, 4, 10\}$ f) $\{2, 4, 5\} \subset \emptyset$.

12. Se consideră următoarele mulțimi:

$$A = \{1, 2\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 2\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 3\}.$$

Stabiliți ce relații există între cele trei mulțimi.

13. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{1, 2, 3\}$ c) $\{1, 3, 5, 7\}$.

14. Scrieți toate submulțimile de două elemente ale mulțimii:

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{1, 4, 9\}$ c) $\{2, 4, 6, 8\}$.

15. Scrieți toate submulțimile de trei elemente ale mulțimii:

- a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\{1, 4, 9, 16\}$ c) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

16. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2\}$ și mulțimea $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determinați toate submulțimile X ale mulțimii B , cu proprietatea că $A \subset X$.

17. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ și mulțimea $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați toate mulțimile X care îndeplinesc proprietățile: $A \subset X \subset B$.

18. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât submulțimea $\{x, 1\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 10\}$.

19. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât submulțimea $\{x, 1, 2\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 5\}$.

20. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\{x, 2, 3, 7\} = \{1, 2, x+2, 7\}.$$

21. Se consideră mulțimile:

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 6\}, C = \{5, 3, 1\}, D = \{3, 1, 5\}.$$

Precizați care dintre aceste mulțimi sunt egale.

22. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\{x, 2, 5, 8, 11\} = \{y, 1, 2, 5, 8\}.$$

23. Determinați $x, y, z \in \mathbb{N}$, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\{x, 3, 5, 6, 10, 1\} = \{y, z, 10, 3, 5, 8\}.$$

24. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 2\}.$$

Stabiliți relația ce există între mulțimile A și B .

25. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât mulțimea:

$$A = \{3, 2x-1, 5x-7, x+1\}$$

să aibă un singur element.

26. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât mulțimea:

$$A = \{1, 5, 2x-1, 5x-14\}$$

să aibă două elemente.

27. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$, astfel încât mulțimea:

$$A = \{2, 5, 4x+1, 5y-3\}$$

să aibă două elemente.

28. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$, astfel încât mulțimea:

$$A = \{3, 5, 4x-1, 3y-4\}$$

să aibă două elemente.

1.2 Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale.

1. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 5 \leq x \leq 15\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 15 < x < 25\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 0 \leq x < 18\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

2. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 8x + 7 = 71\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 15x + 2 = 92\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x : 4 + 12 = 15\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

3. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x \mid 8\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 45\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, x \mid 36\}$.

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

4. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 5 \leq x^2 \leq 45\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 18 < 2^x < 75\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 0 \leq 3^x < 90\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

5. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 9 \leq 2x + 1 \leq 35, x \mid 24\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 15 < 2x + 3 < 41, x \mid 30\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 0 \leq 3x + 1 < 28, x \mid 16\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

6. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 5 \leq 2x + 1 \leq 25\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 11 < 2x - 1 < 21\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 10 \leq 3x + 1 < 28\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

7. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 15 \leq 2x + 1 \leq 55, x : 4 \text{ este natural}\}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 15 < 2x - 1 < 55, x : 3 \text{ este natural}\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*, 13 \leq 3x + 1 < 37, x : 5 \text{ este natural}\}$

apoi determinați în fiecare caz în parte **card** A .

8. Determinați fiecare mulțime de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \text{ este cifră, } \overline{34x} \text{ se divide cu } 2\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \text{ este cifră, } \overline{12x} \text{ se divide cu } 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \text{ este cifră, } \overline{13x} \text{ se divide cu } 5\}$.

9. Arătați că mulțimile de mai jos sunt infinite:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + 3 \geq 7\}$.

b) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3x + 7 \geq 2x + 11\}$.

c) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x + 9 < 3x + 2\}$.

10. Arătați că mulțimile de mai jos sunt infinite:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + x + 1 + x + 2 \geq 12\}$.

b) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + 2x + \dots + 9x \geq 40x + 25\}$.

c) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + 2x + 3x + 4x + 5x < 17x - 10\}$.

1.3 Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.

1. Determinați mulțimile $A \cap B, A \cup B, A - B$ știind că:

- a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 4, 7, 8, 9\};$
 b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 7, 9, 13, 17, 21\};$
 c) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{2, 4, 10, 16, 22\};$
 d) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}, B = \{21, 24, 27\};$
 e) $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}, B = \{a, d, g, h, i, j\}.$

2. Se consideră mulțimile A, B, C :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 7 - k, k \in \mathbf{N}\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 10 - 3k, k \in \mathbf{N}\};$$

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 13 - 5k, k \in \mathbf{N}\}.$$

Determinați mulțimile:

- a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$
 d) $A \cap B$ e) $A \cap C$ f) $B \cap C$
 g) $(A \cup B) \cap C$ h) $(A \cup C) \cap B$ i) $(B \cup C) \cap A$
 j) $(A \cap B) \cup C$ k) $(A \cap C) \cup B$ l) $(B \cap C) \cup A$
 m) $A \cup B \cup C$ n) $A \cap B \cap C.$

3. Se consideră mulțimile A, B, C :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k - 5, k \in \mathbf{N}, k \leq 11\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3k - 10, k \in \mathbf{N}, k < 6\};$$

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k - 3, k \in \mathbf{N}, k \leq 4\}.$$

Determinați mulțimile:

- a) $C - (A \cup B)$ b) $B - (A \cup C)$ c) $A - (B \cup C)$
 d) $(A \cap B) - C$ e) $(A \cap C) - B$ f) $(B \cap C) - A$
 g) $(A - B) \cap C$ h) $(A - C) \cap B$ i) $(B - C) \cap A$
 j) $(A \cap B) \cup C$ k) $(A \cap C) \cup B$ l) $(B \cap C) \cup A$
 m) $A \cup B \cup C$ n) $A \cap B \cap C$ o) $(A - B) - C.$

4. Se consideră mulțimile A, B, C, D :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 72 - 9k, k \in \mathbf{N}\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 30 - 3k, k \in \mathbf{N}\};$$

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 40 - 4k, k \in \mathbf{N}\};$$

$$D = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 50 - 5k, k \in \mathbf{N}\}.$$

Determinați mulțimile:

- a) $A - B$ b) $B - C$ c) $C - D$
 d) $A \cap B$ e) $B \cap C$ f) $C \cap D$
 g) $(A \cup B) - C$ h) $(A \cup C) - B$ i) $(B \cup C) - D$
 j) $(A \cap B) - C$ k) $(A \cap C) - B$ l) $(B \cap C) - A$
 m) $A \cup B \cup C \cup D$ n) $A \cap B \cap C \cap D$ o) $(A \cup B \cup C) - D.$

5. Se consideră mulțimile A, B, C :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^2 - 1, k \in \mathbf{N}, k < 7\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^2 + 2, k \in \mathbf{N}, k \leq 4\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^3 + 2, k \in \mathbf{N}, k \leq 3\}.$$

Determinați mulțimile:

- a) $A - B$ b) $B - C$ c) $C - A$
 d) $A \cap B$ e) $B \cap C$ f) $C \cap D$
 g) $(A - B) \cup C$ h) $(B - C) \cup A$ i) $(C - A) \cup B$
 j) $(A \cap B) - C$ k) $(A \cap C) - B$ l) $(B \cap C) - A$
 m) $A \cup B \cup C$ n) $A \cap B \cap C$ o) $(A - B - C) \cup B.$

6. Se consideră mulțimile A, B, C :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^2 + 1, k \in \mathbf{N}, k < 5\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^2 + 2, k \in \mathbf{N}, k < 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = k^2 + 3, k \in \mathbf{N}, k < 5\}.$$

Arătați că $A \cap B \cap C = \emptyset$.

7. Să se determine mulțimea A , știind că:

- a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n, \quad n = 2, 4, 6, 8\}$;
 b) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n - 1, \quad n = 1, 3, 5, 7\}$;
 c) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 1, \quad n = 1, 2, 3, 4\}$;
 d) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 2, \quad n = 6, 7, 8, 9\}$;
 e) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5n - 1, \quad n = 3, 4, 5, 6\}$;
 f) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 2m, \quad n = 1, 2, 3; m = 1, 2\}$;
 g) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + m, \quad n = 1, 2; m = 2, 3\}$.

Să se calculeze apoi în fiecare caz în parte:

$$A \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ și } A \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

8. Se consideră mulțimea:

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, x, 8, 9\}$;
 b) $A = \{1, 2, 3, 4, x, 7, 9\}$
 c) $A = \{1, 2, 3, 4, x, 7, 8\}$.

Să se determine x , astfel încât în fiecare caz în parte să avem relația:

$$A \cup \{6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

9. Se consideră mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, x\};$$

$$B = \{1, 2, 4, y\}$$

Să se determine x, y , astfel încât să avem relația:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

10. Se consideră mulțimea:

$$A = \{1, 3, x, 7, y, 11\} \text{ și } B = \{1, 3, 7\}.$$

Să se determine x, y , astfel încât să avem relația:

$$A - B = \{5, 9, 11\}.$$

11. Se consideră mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4, x, 8, 9\};$$

$$B = \{1, 2, 3, y, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{1, 2, z, 4, 5, 7, 8\}.$$

Să se determine x, y, z , astfel încât să avem relația:

$$A \cap B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

12. Se consideră mulțimile:

$$X = \{1, 2, 3, 4, x, y\} \text{ și } Y = \{1, 3, 5, z\}.$$

Să se determine $x, y, z \in \mathbf{N}$ astfel încât să aibă loc relațiile:

- a) $X \cap Y = \{1, 3, 5\}$;
 b) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

13. Să se determine mulțimea X , știind că:

- a) $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$;
 b) $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

14. Să se determine mulțimea X , știind că:

- a) $X \cap \{2, 3, 4\} = \{3\}$;
 b) $X \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 c) X are 3 elemente.

15. Să se determine mulțimea X , știind că:

- a) $X \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$;
 b) $X \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
 c) X are numai elemente impare.

16. Să se determine mulțimea X , știind că:

- a) $X \cap \{2, 4, 5\} = \{\Phi\}$;
 b) $\{1, 3\} \subset X$;
 c) $X \subset \{1, 2, 3\}$.

1. Valoarea calculului $(-2)^1 \cdot (-2)^2 \cdot \dots \cdot (-2)^{15}$ este:
 2^{100} 2^{110} 2^{120} 2^{130} 2^{140}

2. Mulțimea: $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^3 + x^2 + x > 6\} \cap \{0, 1, 2\}$ este egală cu mulțimea:

$\{0\}$ $\{0, 1\}$ $\{1, 2\}$ $\{2\}$ $\{0, 1, 2\}$

3. Soluția ecuației: $\frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 = 0$ este:

0 1 2 3 4

4. Numărul rațional $\frac{1+2-3+4-5+6-7+8-9+10}{1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11}$ adus la forma cea mai simplă este egal cu:

$\frac{4}{5}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{9}$

5. Fie $a = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{9}{8}$ și $b = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{10}{9}$. Valoarea lui $a \cdot b$ este egală cu:

70 80 90 100 110

6. Soluția ecuației: $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 26$ este:

4 5 3 4 6

7. Fie ABC un triunghi oarecare și $AD, D \in BC$ bisectoarea unghiului \hat{A} . Fie $E \in AB$ astfel încât $AE = AC$ și $O = AD \cap EC$.

Arătați că unghiul \widehat{AOC} are măsura egală cu:

30° 45° 60° 75° 90°

8. Fie un cerc de centru O și punctele A, B, C, D pe cerc astfel încât să avem: $m(\widehat{AOB}) = 100^\circ, m(\widehat{BOC}) = 80^\circ, m(\widehat{COD}) = 60^\circ, m(\widehat{DOA}) = 120^\circ$. Fie OM, ON, OP, OQ bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOA}$. Numărul perechilor de drepte perpendiculare din desen este egal cu:

1 2 3 4 5

INDICAȚII, RĂSPUNSURI ȘI REZOLVĂRI

1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale.

1.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice / nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime.

Relații între mulțimi.

- a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- a) Împărțind un număr la 5 putem obține resturile: 0, 1, 2, 3, 4. Atunci mulțimea resturilor este: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- $\{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$.
- $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.
- $\{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}$.
- $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ este mulțimea cifrelor pare și $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ este mulțimea cifrelor impare.
- Propoziția b) este adevărată și propozițiile a), c), d), e) sunt false.
- Propozițiile b), d), e) sunt adevărate și propozițiile a) și c) sunt false.
- Propozițiile a), b), e) sunt adevărate și propozițiile c), d) și f) sunt false.
- $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{1, 2\}$ și avem: $B \subset A = C$.
- a) Submulțimile sunt: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.
- c) $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$.
- b) $\{1, 4, 9\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 9, 16\}$.
- $\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Submulțimea $\{x, 1\}$ este submulțime a mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 10\}$ pentru $x \in \{3, 5, 7, 10\}$.
- Submulțimea $\{x, 1, 2\}$ este submulțime a mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ pentru $x \in \{0, 3, 5\}$.
- Trebuie să avem: $x = 1$ și $x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

21. $A = C = D$.

22. Trebuie ca $x = 1, y = 11$.

23. $x = 8$, iar y, z iau valorile 6 și 1.

24. $B = \{0, 1, 2\} \subset A = \{0, 1, 2, 3\}$.

25. Mulțimea A are un singur element dacă:

$2x - 1 = 5x - 7 = x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

26. Mulțimea A are două elemente dacă:

$2x - 1 = 5; 5x - 14 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

27. $x = 1, y = 1$.

28. $x = 1, y = 3$.

1.2 Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale.

1. a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ și $\text{card } A = 11$.

2. a) $8x + 7 = 71 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A = \{8\}$ și $\text{card } A = 1$.

3. a) $A = \{1, 2, 4, 8\}$ și $\text{card } A = 4$.

4. a) $5 < x^2 < 45 \Rightarrow x^2 = 9, 16, 25, 36 \Rightarrow x = 3, 4, 5, 6$ și $A = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \text{card } A = 4$.

5. a) $9 \leq 2x + 1 \leq 35 \Rightarrow 9 \leq 2x + 1$ și $2x + 1 \leq 35 \Rightarrow 2x \geq 9 - 1$ și $2x \leq 35 - 1 \Rightarrow x \geq 4$ și $x \leq 17 \Rightarrow x = 4, 5, \dots$,

17. Însă $x|24 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Din cele două rezultă $x = 4, 6, 8, 12$ și atunci $A = \{4, 6, 8, 12\}$ și $\text{card } A = 4$.

7. $15 \leq 2x + 1 \leq 55 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 7 \leq x \leq 27$. Însă $x : 4$ și atunci $x = 8, 12, 16, 20, 24 \Rightarrow A = \{8, 12, 16, 20, 24\}$ și $\text{card } A = 5$.

8. a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

9. b) $3x + 7 \geq 2x + 11 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow x = 4, 5, 6, \dots$ și atunci rezultă că mulțimea A este infinită.

10. b) $x + 2x + \dots + 9x \geq 40x + 25 \Rightarrow 45x \geq 40x + 25 \Rightarrow 5x \geq 25 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow x = 5, 6, 7, \dots$ și atunci rezultă că mulțimea A este infinită.

1.3 Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.

1. a) $A \cap B = \{1, 4\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}, A - B = \{2, 3\}$.

2. $x = 7 - k \geq 0 \Rightarrow k \leq 7 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ și atunci avem: $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$x = 10 - 3k \geq 0 \Rightarrow 3k \leq 10 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$ și atunci avem: $x = 10 - 3 \cdot 0 = 10; x = 10 - 3 \cdot 1 = 7; x = 10 - 2 \cdot 3 = 4; x = 10 - 3 \cdot 3 = 1 \Rightarrow B = \{1, 4, 7, 10\}$.

$x = 13 - 5k \geq 0 \Rightarrow 5k \leq 13 \Rightarrow k = 0, 1, 2$ și atunci avem: $x = 13 - 5 \cdot 0 = 13; x = 13 - 5 \cdot 1 = 8; x = 13 - 5 \cdot 2 = 3 \Rightarrow C = \{3, 8, 13\}$.

Deci: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 4, 7, 10\}, C = \{3, 8, 13\}$.

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$;

b) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13\}$ și

c) $B \cup C = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, 13\}$.

5. $A = \{0, 3, 8, 15, 24, 35\}, B = \{2, 3, 6, 11, 18\}, C = \{2, 3, 10, 29\}$.

a) $A - B = \{0, 8, 15, 24, 35\}; B - C = \{6, 11, 18\}; C - A = \{2, 10, 29\}$.

6. $A = \{1, 2, 5, 10, 17\}; B = \{2, 3, 6, 11, 18\}; C = \{3, 4, 7, 12, 19\}$ și atunci $A \cap B \cap C = \emptyset$.

7. a) $A = \{4, 8, 12, 16\}$. f) $A = \{5, 7, 8, 10, 11, 13\}$.

8. a) $\{1, 2, 3, 4, x, 8, 9\} \cup \{6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow x = 5$.

9. Evident $x = 4$ și $y = 3$.

10. Evident $x = 5$ și $y = 9$.

11. $3 \in A \cap B \cap C$ și $3 \in A$ și $3 \in B$, atunci $3 \in C \Rightarrow z = 3$. Analog $y = 4$ și $x = 5$.

13. $X = \{1, 2, 4, 6\}$.

14. $X = \{1, 3, 5\}$.

15. $X \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\} \Rightarrow 1, 3 \in X$. Ținând cont și de condițiile b) și c) rezultă $5 \in X \Rightarrow X = \{1, 3, 5\}$.

17. $X = \{1, 2, 5\}$.